MAI 1 – 3.cvičení (16.10.2014)

Ještě příklady z minulého cvičení – důkazy užitím matematické indukce; vlastnosti zobrazení.

Těleso reálných čísel (a cvičení důkazů) :

1. Dokažte následující tvrzení:
   a) Je-li $x \in R, x \neq 0$, pak opačný prvek $-x$ a inverzní prvek x^{-1} jsou určené jednoznačně ;
   b) $\forall x \in R$: $0..x = 0$;
   c) $\forall x, y \in R$: $(-x).(-y) = x.y$;
   d) $\forall x \in R$: $-(-x) = x$, $-x = (-1).x$;
   e) $\forall x, y \in R$: $(-x).y = -(x.y) = x.(-y)$.

2. Dokažte:
   a) $0 < 1$; b) $0 < x \Rightarrow 0 < x^{-1}$; c) $x \neq 0 \Rightarrow 0 < x.x$; d) $0 < x \Rightarrow -x < 0$;
   e) $x < y \Rightarrow -x > -y$; f) $x < 0 < y \Rightarrow x.y < 0$.

Supremum a infimum:

1. Zopakujte si definici suprema , infima, maxima a minima množiny v R, také větu o supremu (infimu).

2. Uveďte příklad množiny, která má supremum a nemá maximum; může mít množina maximum, ale ne supremum?
   Uveďte příklad množiny, která supremum nemá.

3. Najděte (v R) supremum, infimum, maximum, minimum (pokud existují) následujících množin:

   a) $A_1 = \left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$; $A_2 = \left\{1 - \frac{1}{n^2}; n \in N\right\}$; $A_3 = \left\{\frac{n-1}{n}; n \in N\right\}$; $A_4 = \left\{\frac{n+(-1)^n}{n}; n \in N\right\}$;
   $A_5 = \left\{n^{(-1)^n}; n \in N\right\}$; $A_6 = \left\{\frac{p}{p+q}; p, q \in N\right\}$;

   b) $B_1 = \left\{n^2 - m^2; m, n \in N\right\}$; $B_2 = \left\{n^2 - m^2; m, n \in N, n > m\right\}$; $B_3 = \left\{n^2 - m^2; m, n \in N, n \leq m\right\}$;

   c) $C_1 = \left\{2^{-n} + 3^{-n}; n \in N\right\}$; $C_2 = \left\{2^{-n} + 3^{-n}; n \in Z\right\}$;

   d) $D_1 = \{\sin x; x \in [0,2\pi]\}$; $D_1 = \{\sin x; x \in (0,2\pi)\}$; $D_1 = \{\sin x; x \in (0,\pi)\}$; $D_1 = \{\sin x.\cos x; x \in R\}$;

   e) $E = \left\{q < \sqrt{3}; q \in Q\right\}$.

4. Ukažte, že pro neprázdné množiny A, B reálných čísel platí: $(\forall a \in A\ \forall b \in B: a \leq b) \Rightarrow (\sup A \leq \inf B)$.

5. Nechť podmnožiny A, B množiny reálných čísel jsou neprázdné a omezené. Co lze říci o supremu a infimu množin
   a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A + B = \{a + b;\ a \in A \wedge b \in B\}$; d) $-A = \{-a;\ a \in A\}$.